



**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapa Județeană și a Municipiului București, 10 martie 2018**

**CLASA a VIII-a**

Varianta 2

**Problema 1.** Arătați că dacă  $m, n \in \mathbb{N}^*$ , atunci

$$\left\{ \frac{m}{n} \right\} + \left\{ \frac{n}{m} \right\} \neq 1.$$

(Am notat cu  $\{x\}$  partea fracționară a numărului real  $x$ .)

*Gazeta Matematică*

**Problema 2.** Fie  $a, b, c \in [1, \infty)$ . Demonstrați că

$$\frac{a\sqrt{b}}{a+b} + \frac{b\sqrt{c}}{b+c} + \frac{c\sqrt{a}}{c+a} + \frac{3}{2} \leq a + b + c.$$

**Problema 3.** Fie paralelipipedul dreptunghic  $ABCD A' B' C' D'$ . Notăm cu  $M$ ,  $N$  și  $P$  mijloacele muchiilor  $[AB]$ ,  $[BC]$ , respectiv  $[BB']$ . Fie  $\{O\} = A'N \cap C'M$ .

- Arătați că punctele  $D$ ,  $O$ ,  $P$  sunt coliniare.
- Arătați că  $MC' \perp (A'PN)$  dacă și numai dacă  $ABCD A' B' C' D'$  este cub.

**Problema 4.** a) Fie numerele naturale nenule  $a, b, c$  astfel încât  $a < b < c$  și  $a^2 + b^2 = c^2$ . Demonstrați că dacă  $a_1 = a^2$ ,  $a_2 = ab$ ,  $a_3 = bc$ ,  $a_4 = c^2$ , atunci  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_4^2$  și  $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ .

b) Demonstrați că, oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ , există numerele naturale nenule  $a_1, a_2, \dots, a_n$  care verifică relațiile  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2 = a_n^2$  și  $a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n$ .

*Timp de lucru 4 ore.*

*Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*